

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 3

(Krive: Frenetove jednačine)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 7og novembra.

Problem 3.1. Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ . Definišimo “Darboux-ovo vektorsko polje”

$$\delta := N \times N' = \tau T + \kappa B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Rješenje. Pretpostavimo da naš okvir $F = (T, N, B)$ zadovoljava Frenetove jednačine i neka je $\delta := N \times N'$; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer F uzima vrijednosti u $SO(3)$; drugo,

$$\begin{aligned} T' - \delta \times T &= \kappa N - (\tau T + \kappa B) \times T = 0, \\ N' - \delta \times N &= -\kappa T + \tau B - (\tau T + \kappa B) \times N = 0, \\ B' - \delta \times B &= -\tau N - (\tau T + \kappa B) \times B = 0. \end{aligned}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine $X' = \delta \times X$, gdje $X = T, N, B$.

S druge strane, pretpostavimo da je $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$ okvir koji zadovoljava $X' = \delta \times X$ za $X = T, N, B$ sa $\delta := \tau T + \kappa B$. Onda, obrćući gornju pretpostavku, sobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= T' - \delta \times T = T' - \kappa N, \\ 0 &= N' - \delta \times N = N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 &= B' - \delta \times B = B' + \tau N. \end{aligned}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine.

Problem 3.2. Pokazati da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijednosti u sferi ako i samo ako njene normalne ravni prolaze kroz (fiksnu) tačku $c \in \mathbb{R}^3$ (centar sfere). Pomoć: kada budete provjeravali konstantnu udaljenost $|\gamma - c|^2$ nemojte izražavati koeficijente c pomoću krivine i torzije.

Rješenje. Pretpostavljamo da je kriva regularna i, bez gubitka opštosti, da je parametrizovana dužinom luka.

Ako je $|\gamma - c|^2 \equiv r^2$ za neko $c \in \mathbb{R}^3$ i $r \in (0, \infty)$ onda je, uzimajući izvod, $0 \equiv (\gamma - c) \cdot T$, to jest, c leži na svakoj normalnoj ravni krive γ .

S druge strane, pretpostavimo da sve normalne ravni prolaze kroz fiksnu tačku $c \equiv \gamma + \alpha N + \beta B$. Frenetove jednačine daju

$$0 = (1 - \alpha\kappa)T + (\alpha' - \beta\tau)N + (\beta' + \alpha\tau)B$$

tako da, posebice, $\alpha' = \beta\tau$ i $\beta' = -\alpha\tau$. Onda,

$$(|\gamma - c|^2)' = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = 2\alpha\beta\tau - 2\beta\alpha\tau = 0,$$

to jest, $|\gamma - c| \equiv \text{const}$ tako da γ leži u sferi centriranoj u c .

Drugi dio se može dokazati i mnogo brže drugim argumentom (medjutim, gornji argument fino demonstrira šire aplikativnu metodu): da sve normalne ravni prolaze kroz fiksnu tačku $c \in \mathbb{R}^3$ znači da

$$0 \equiv (c - \gamma) \cdot T = -\frac{1}{2}(|\gamma - c|^2)';$$

stoga $|\gamma - c|^2 \equiv \text{const}$ i kriva uzima vrijednosti u sferi centriranoj u c .

Problem 3.3. Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^t \beta(t) \times \beta'(t) dt. \quad (\star)$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$.)

Sada pretpostavimo da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ (parametrizovana dužinom luka) ima konstantnu torziju $\tau \equiv 1$. Pokazati da je γ oblika (\star) sa odgovarajućom krivom $s \mapsto \beta(s) \in S^2$. (Pomoć: uzmite binormalno vektorsko polje.)

Rješenje. Prvo, posmatrajmo $\gamma = \int \beta \times \beta'(t) dt$: imamo

$$\begin{aligned} \gamma' &= \beta \times \beta', \\ \gamma'' &= \beta \times \beta'', \\ \gamma''' &= \beta' \times \beta'' + \beta \times \beta'''. \end{aligned}$$

Sada, $|\beta|^2 \equiv 1$ tako da $\beta' \perp \beta$ i

$$|\gamma'|^2 = |\beta|^2 |\beta'|^2 = |\beta'|^2 > 0$$

jer je β regularna; stoga je γ regularna.

Kako bismo izračunali torziju, koristimo formulu

$$\tau = \frac{|\gamma' \cdot \gamma'' \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2} = \frac{((\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'')) \cdot (\beta' \times \beta'' + \beta \times \beta''')}{|(\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'')|^2} = \frac{|\beta, \beta', \beta''|^2}{|\beta|^2 |\beta, \beta', \beta''|^2} \equiv 1$$

jer je $(\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'') = \beta |\beta, \beta', \beta''|$. Ovdje nailazimo na problem kada $|\beta, \beta', \beta''| = 0$, tj., ako su β, β' i β'' linearno zavisni. Ako se ovo dogodi u izolovanim tačkama, to ne stvara problem jer je τ glatka funkcija i stoga će biti 1 u tim tačkama zbog neprekidnosti; ako se to dogodi na intervalu onda γ' i γ'' postaju linearno zavisne na tom intervalu i taj dio krive je prava linija sa nejedinstvenom torzijom (stoga, možemo smatrati da prava linija ima torziju $\tau \equiv 1$).

Za obratno, uzmimo $\beta := B$, gdje B označava binormalu Frenetovog okvira. Onda, očito, $s \mapsto \beta(s) \in S^2$ i

$$\beta \times \beta' = B \times (-\tau N) = \tau N \times B = T = \gamma'.$$

Oдавде $\int_{s_0}^s \beta \times \beta'(s) ds = \gamma(s) - \gamma(s_0)$ i formula koju smo tvrdili je tačna do translacije krive.

Problem 3.4. Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ funkcija i definišimo $\varphi(s) := \int_{s_0}^s \kappa(s) ds$. Proverite da

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(s) ds, \int_{s_0}^s \sin \varphi(s) ds, 0 \right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$.

Rješenje. Ovo je pravolinijski po diferencijaciji: imamo

$$\gamma' = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je $|\gamma'| \equiv 1$ i γ je parametrizovana dužinom luka. Kako je (x, y) -ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

(ovo dobijemo 90° rotacijom iz $T = \gamma'$ u (x, y) -ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin \varphi, \varphi' \cos \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu κ (obrćući principalnu normalu bi rezultiralo u krivini $-\kappa$).