

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 2

(Krive: krivina i torzija)

Predati rješenja na kraju predavanja u Srijedu, 31og oktobra.

Problem 2.1. Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive.

Problem 2.2. Uvjerite se da se oskulatorna kružnica dužinom luka parametrizovane krive γ u tački $\gamma(s_0)$ (koristite $s_0 = 0$ kako bi vam bilo lakše) doista može parametrizovati (dužinom luka) tako da se Taylorovi polinomi drugog reda zaista poklapaju.

Problem 2.3. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ parametrizovana kriva tako da $T'(t) \neq 0, \forall t$. Pokazati da možemo izabrati $N = \frac{T'}{|T'|}$ i da, sa ovim izborom N ,

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{|\gamma' \cdot \gamma'' \cdot \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Problem 2.4. Naći krivinu i torziju krive

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right).$$

Dajte geometrijski argument zašto τ nestaje.

Problem 2.5. Neka je $s \mapsto \tau(s)$ proizvoljna funkcija. Naći dužinom luka parametrizovanu krivu $s \mapsto \gamma(s)$ sa krivinom $\kappa \equiv 0$ torzijom τ (provjerite krivinu i torziju!).